

Schwarze Löcher ohne Singularität

Eine konzeptionelle Neuinterpretation von „Unendlich“
in der Gravitation

Rudolf Stepan

Independent Researcher, Wien · ORCID: 0009-0004-2842-2579

2026 · DOI: 10.5281/zenodo.21318834

Zusammenfassung

Kollabierende Materie erzeugt in der Allgemeinen Relativitätstheorie unter sehr allgemeinen Voraussetzungen Raumzeit-Singularitäten: Krümmungsinvarianten divergieren, Geodäten enden nach endlicher Eigenzeit, und die Theorie verliert ihre Vorhersagekraft. Üblicherweise werden diese Divergenzen nicht als physikalische Unendlichkeiten gelesen, sondern als Zeichen dafür, dass die Kontinuumsbeschreibung der Raumzeit an die Grenze ihres Gültigkeitsbereichs gestoßen ist. Verschiedene Zugänge zur Quantengravitation, etwa Fuzzball-Modelle oder Planck-Sterne, ersetzen die Singularität dementsprechend durch einen endlichen, stark quantenmechanischen Zustand. Die vorliegende Arbeit macht diesen Gedanken auf konzeptioneller Ebene explizit. Das Schwarze Loch wird als *Betragszustand* der kollabierten Masse-Energie aufgefasst; „Unendlich“ ist in diesem Bild kein Wert, den Observablen annehmen, sondern ein *Domänenmarker*, der den Übergang vom klassischen Konfigurationsraum in einen neuen Zustandsraum Schwarzer Löcher anzeigt. Ein einfaches mathematisches Rahmenwerk präzisiert den Übergang: Eine kritische Dichte $\rho_{\max}$ definiert einen Übergangsradius R^* , unterhalb dessen die Konfiguration durch einen Betragszustands-Operator $\mathcal{B}$ auf einen endlichen Zustand $\mathcal{B}(M)$ abgebildet wird. Die drohende Divergenz löst diese Abbildung aus, statt einen unendlichen Wert zu liefern. Der Rahmen ersetzt keine Quantengravitationstheorie; er stellt eine kontrollierte Sprache für den Umgang mit Unendlichkeiten im Gravitationskollaps bereit und verbindet die klassischen Singularitätssätze mit modernen Szenarien der Singularitätsauflösung.

Schlagwörter: Schwarze Löcher, Raumzeit-Singularitäten, Allgemeine Relativitätstheorie, Quantengravitation, Gravitationskollaps, Unendlich als Domänenmarker, Betragszustand, Singularitätsauflösung, Informationsparadoxon, holographisches Prinzip.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Beitrag und Einordnung	3
1.2	Aufbau der Arbeit	4
2	Schwarze Löcher und Singularitäten in der klassischen ART	4
3	Bestehende Ansätze zur Singularitätsauflösung	5
4	Unendlich als Domänenmarker	6
5	Ein einfaches mathematisches Rahmenwerk	7
5.1	Klassische Dichtedivergenz	7
5.2	Saturierte Observablen und Übergangsbedingung	7
5.3	Betragszustands-Operator und das Analogon zur Division durch null	9
6	Anwendung auf den Gravitationskollaps	10
6.1	Kollapsszenario im Modell	10
7	Diskussion: Information, Entropie und Beobachter	11
8	Grenzen des Ansatzes	12
9	Schlussfolgerung und Ausblick	12

1 Einleitung

Schwarze Löcher gehören zu den robustesten Vorhersagen der Allgemeinen Relativitätstheorie. Die Singularitätssätze von Penrose und Hawking zeigen, dass fortgesetzter Gravitationskollaps unter allgemeinen und physikalisch plausiblen Bedingungen an den Materieinhalt zwangsläufig zur Bildung von Raumzeit-Singularitäten hinter Ereignishorizonten¹ führt [1, 2]. Charakterisiert sind diese Singularitäten durch geodätische Unvollständigkeit² und die Divergenz von Krümmungsinvarianten³. Die Objekte selbst sind längst keine theoretische Idealisierung mehr: Gravitationswellensignale verschmelzender Schwarzer Löcher [6] und die horizontnahen Aufnahmen des Event Horizon Telescope [7] bestätigen die Vorhersagen für die Außengeometrie. Über das Innere und den Endpunkt des Kollapses sagen diese Beobachtungen jedoch nichts; dort bleibt die Theorie auf sich gestellt.

Wie solche Divergenzen physikalisch zu deuten sind, ist damit noch nicht gesagt. Weithin akzeptiert ist, dass sie den Zusammenbruch der klassischen Kontinuumsbeschreibung anzeigen und nicht die Existenz tatsächlich „unendlicher Größen“ in der Natur. Mikroskopische Modelle Schwarzer Löcher in Kandidatentheorien der Quantengravitation stützen diese Lesart: Sowohl die Fuzzball-Modelle der Stringtheorie⁴ [8] als auch die Planck-Sterne der Loop-Quantengravitation⁵ [9] setzen an die Stelle der Singularität einen endlichen, stark quantenmechanischen Zustand mit einer großen, aber endlichen Zahl zugrunde liegender Freiheitsgrade. Die Suche nach einem konsistenten nichtsingulären Bild des Inneren hat sich inzwischen zu einem eigenen Forschungsprogramm entwickelt (siehe zuletzt den Überblick in [10]).

Die vorliegende Arbeit entwickelt einen konzeptionellen Rahmen, in dem Schwarze Löcher als *Betragszustände* der kollabierten Masse-Energie verstanden werden. Taucht in klassischen Ausdrücken ein ∞ auf, etwa in Krümmungsskalaren oder effektiven Dichten, so lesen wir das als *Domänenmarker*: Die Rechnung hat den Bereich verlassen, in dem die klassischen Observablen definiert sind. An dieser Grenze tritt ein neuer Zustand an die Stelle der bisherigen Beschreibung, und diesen Zustand identifizieren wir mit dem Schwarzen Loch selbst.

1.1 Beitrag und Einordnung

Der Vorschlag wird in einer bewusst einfachen Form präsentiert. Der Beitrag der Arbeit liegt in vier Punkten:

1. einer Lesart klassischer Divergenzen als Domänenmarker, angelehnt an den Umgang mit Divergenzen in der Quantenfeldtheorie (Abschnitt 4);
2. einem einfachen mathematischen Rahmenwerk, in dem eine kritische Dichte $\rho_{\max}$ einen Übergangsradius R^* definiert und divergente Observablen durch saturierte Größen mit expliziter Übergangsbedingung ersetzt werden (Abschnitte 5.1 und 5.2);

¹Der Ereignishorizont ist die Grenzfläche, von der aus keine Signale mehr zu entfernten Beobachtern gelangen können; formal ist er der Rand des Raumzeitbereichs, der mit der äußeren Unendlichkeit kausal verbunden ist, vgl. [3].

²Geodäten sind die Weltlinien frei fallender Teilchen beziehungsweise Lichtstrahlen. Eine Raumzeit heißt geodätisch unvollständig, wenn sich mindestens eine Geodäte nicht über einen endlichen Parameterwert hinaus fortsetzen lässt, die Weltlinie also nach endlicher Zeit endet, ohne dass es ein „Danach“ gäbe. Diese Eigenschaft dient als operationale Definition einer Singularität [3, 4].

³Krümmungsinvarianten sind koordinatenunabhängige Skalare, die aus dem Riemann-Krümmungstensor gebildet werden. Divergiert eine solche Invariante, lässt sich die Divergenz nicht durch eine geschicktere Koordinatenwahl beseitigen [5].

⁴Die Stringtheorie ist ein Kandidat für eine vereinheitlichte Quantentheorie aller Wechselwirkungen; ihre Grundobjekte sind eindimensionale Strings sowie höherdimensionale Bran-Objekte, auf denen Strings enden können.

⁵Die Loop-Quantengravitation quantisiert die Geometrie der Raumzeit selbst, ohne eine feste Hintergrundraumzeit vorauszusetzen; Flächen und Volumina besitzen dort diskrete Spektren.

3. einem abstrakten Betragszustands-Operator $\mathcal{B} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}_{\text{BH}}$, der die kollabierte Konfiguration auf einen endlichen Schwarzen-Loch-Zustand abbildet, samt einer Deutung als kontrolliertes Analogon zur „Division durch null“ (Abschnitt 5.3);
4. der Anwendung auf ein Kollapsszenario und der Einordnung der Konsequenzen für Information, Entropie und Beobachterabhängigkeit (Abschnitte 6 und 7).

Der Rahmen legt sich auf keine bestimmte Quantengravitationstheorie fest. Er liefert weder ein mikrophysikalisches Modell für den Zustand $\mathcal{B}(M)$ noch eine neue, durchrechenbare Theorie; Fuzzballs oder Planck-Sterne lassen sich als konkrete Realisierungen von $\mathcal{B}(M)$ in spezifischen Theorierahmen lesen, während die vorliegende Arbeit die gemeinsame Struktur solcher Szenarien eine Abstraktionsebene höher beschreibt. Ziel ist eine transparente, physikalisch motivierte Antwort auf die Frage, wie sich ∞ in der Gravitation kontrolliert behandeln lässt.

1.2 Aufbau der Arbeit

Abschnitt 2 rekapituliert das klassische Bild Schwarzer Löcher und Singularitäten in der Allgemeinen Relativitätstheorie. Abschnitt 3 gibt einen Überblick über bestehende Vorschläge zur Singularitätsauflösung. Abschnitt 4 entwickelt die Deutung von ∞ als Domänenmarker. Abschnitt 5 führt das mathematische Rahmenwerk mit Dichtesättigung, Übergangsbedingung und Betragszustands-Operator ein. Abschnitt 6 wendet das Rahmenwerk auf den Gravitationskollaps an. Abschnitt 7 behandelt Information, Entropie und Beobachterabhängigkeit; Abschnitt 8 benennt die Grenzen des Ansatzes, Abschnitt 9 fasst zusammen und skizziert Erweiterungen.

2 Schwarze Löcher und Singularitäten in der klassischen ART

Im einfachsten Fall beschreibt die Schwarzschild-Lösung [11] das äußere Gravitationsfeld einer statischen, sphärisch symmetrischen, ungeladenen Masse M . Kollabiert Materie unter ihren Schwarzschild-Radius

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad (1)$$

so bildet sich ein Ereignishorizont: eine Nullfläche⁶, von der aus Licht und kausale Signale keine asymptotischen Beobachter mehr erreichen. Innerhalb dieses Horizonts enden alle zukunftsgerichteten zeitartigen Geodäten nach endlicher Eigenzeit⁷ bei $r = 0$.

Dort divergieren Krümmungsinvarianten; für die Schwarzschild-Lösung gilt etwa für den Kretschmann-Skalar⁸

$$K = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48 G^2 M^2}{c^4 r^6} \rightarrow \infty \quad (r \rightarrow 0). \quad (2)$$

Geometrisch schwerer wiegt die geodätische Unvollständigkeit: Es existieren nicht fortsetzbare Geodäten endlicher affiner Parameterlänge. Der Singularitätssatz von Penrose löst diesen Befund von der speziellen Symmetrie der Schwarzschild-Lösung ab; die Originalarbeit fasst das Ergebnis so zusammen: „deviations from spherical symmetry cannot prevent space-time singularities from arising“ [1, S. 57]. Sobald die Materie geeignete Energiebedingungen⁹ erfüllt und eine

⁶Eine Nullfläche ist eine Fläche, deren Normalenrichtungen lichtartig sind; sie lässt sich nur in einer Richtung durchqueren.

⁷Eigenzeit ist die Zeit, die eine mit dem Teilchen mitfallende Uhr anzeigt.

⁸Der Kretschmann-Skalar ist die vollständige quadratische Kontraktion des Riemann-Tensors. Anders als der Ricci-Skalar verschwindet er in Vakuumlösungen nicht identisch und eignet sich daher als Krümmungsmaß der Schwarzschild-Geometrie [5].

⁹Energiebedingungen sind Positivitätsforderungen an den Energie-Impuls-Tensor; sie formalisieren, dass gewöhnliche Materie anziehend gravitiert, vgl. [3].

gefangene Fläche (*trapped surface*)¹⁰ entsteht, ist geodätische Unvollständigkeit unvermeidlich (vgl. die Verallgemeinerungen in [2, 3]).

Eine Singularität in diesem Sinn ist nicht Teil der Mannigfaltigkeit¹¹ [4]. Sie ist kein Punkt im Raum, an dem „unendliche Dichte“ säße, sondern ein Rand der Raumzeit, an dem die klassische Beschreibung schlicht aufhört. Die Divergenz der Krümmung ist damit ein Symptom des Zusammenbruchs der Theorie, nicht zwingend eine Eigenschaft der zugrunde liegenden physikalischen Realität. Abgeschlossen ist diese Debatte nicht. Was genau ein Schwarzes Loch ausmacht, beantworten verschiedene Teilgebiete der Physik bis heute unterschiedlich; Curiel wertet diese Vielfalt ausdrücklich als Stärke: „within reasonable bounds, the profusion of different definitions is in fact a virtue“ [12]. Und Kerr hat 2023 bestritten, dass aus den Sätzen mehr als geodätische Unvollständigkeit folgt: „There is no proof that black holes contain singularities when they are generated by real physical bodies“ [13].

Das motiviert die Suche nach einer Beschreibung, in der der Endzustand des Gravitationskollapses ein wohldefiniertes, endliches Objekt ist. In der klassischen Theorie ist dieser Endzustand global kodiert, nämlich durch den Ereignishorizont und asymptotische Ladungen wie Gesamtmasse, Drehimpuls und elektrische Ladung. Von einer Quantentheorie der Gravitation erwartet man darüber hinaus, dass er eine endliche, wenn auch möglicherweise enorme Zahl von Mikrozuständen¹² besitzt.

3 Bestehende Ansätze zur Singularitätsauflösung

Mehrere Forschungsprogramme der Quantengravitation zielen darauf, die klassische Singularität durch einen endlichen Quantenzustand zu ersetzen.

In der Stringtheorie tritt an die Stelle des klassischen Innenraums ein „Fuzzball“: Nach Mathurs Vorschlag [8] ist ein Schwarzes Loch ein Ensemble horizontgroßer String- und Bran-Konfigurationen, deren Geometrien schon auf Skalen des Horizontradius von der klassischen Lösung abweichen. Eine Singularität kommt in diesem Bild nicht vor; der Bereich, den klassisch eine glatte Geometrie mit singulärem Zentrum einnahm, ist von komplizierten, aber endlichen stringtheoretischen Strukturen ausgefüllt.

Die Loop-Quantengravitation kennt mehrere Modelle, in denen Quanteneffekte der Geometrie den Kollaps bei hoher, aber endlicher Dichte stoppen [14, 15]. Das Planck-Stern-Szenario fasst diese Phase in einem Satz: „A star that collapses gravitationally can reach a further stage of its life, where quantum-gravitational pressure counteracts weight“ [9]. Es bildet sich ein extrem dichter Kern, der aus Sicht äußerer Beobachter später in ein weißes Loch¹³ übergehen kann. Ausgearbeitete Varianten dieses Bildes beschreiben langlebige Weiße-Loch-Reste als Endstadium der Verdampfung [16].

Eng verwandt ist die Literatur zu *regulären Schwarzen Löchern*: effektiven Metriken, die außen mit der klassischen Lösung übereinstimmen, im Zentrum aber einen Kern endlicher Krümmung tragen. Hayward etwa gibt eine Geometrie an, die den vollen Lebenszyklus ohne Singularität abbildet: „Regular (nonsingular) space-times are given that describe the formation of a (locally defined) black hole from an initial vacuum region, its quiescence as a static region, and its subsequent evaporation to a vacuum region“ [17]. Der zugrunde liegende Gedanke einer universellen Obergrenze für die Dichte der Materie findet sich schon bei Markov [18]. Wie

¹⁰Eine gefangene Fläche ist eine geschlossene Fläche, von der aus selbst die nach außen laufenden Lichtstrahlen konvergieren; ihr Auftreten zeigt an, dass der Kollaps nicht mehr aufzuhalten ist [1].

¹¹Die Mannigfaltigkeit ist die glatte Punktmenge, aus der die Raumzeit mathematisch besteht; die Singularität gehört nicht dazu, sondern bildet einen ideellen Randpunkt.

¹²Mikrozustände sind mikroskopisch verschiedene Konfigurationen, die dieselben makroskopischen Kenngrößen tragen; ihre Anzahl Ω bestimmt die statistische Entropie $S = k_B \ln \Omega$.

¹³Ein weißes Loch ist die Zeitumkehr eines Schwarzen Lochs: eine Region, aus der Materie und Licht nur entkommen, in die sie aber nicht eindringen können.

solche Geometrien dynamisch entstehen, ob sie stabil sind und woran man sie beobachtend von klassischen Schwarzen Löchern unterscheiden könnte, wird derzeit systematisch untersucht [10].

Einen weiteren Zugang eröffnen die Thermodynamik Schwarzer Löcher [19, 20] und das holographische Prinzip [21, 22] (für einen Überblick siehe [23]). Dass die Entropie eines Schwarzen Lochs mit der Horizontfläche statt mit dem eingeschlossenen Volumen skaliert, spricht dafür, dass seine relevanten Freiheitsgrade effektiv auf einem niederdimensionalen Rand sitzen und ihr Informationsgehalt endlich ist, proportional zur Horizontfläche in Planck-Einheiten¹⁴. Mit der AdS/CFT-Korrespondenz¹⁵ [24] existiert dafür eine konkrete Realisierung.

Tabelle 1: Ansätze zur Singularitätsauflösung im Vergleich. Alle ersetzen die divergenten Größen der klassischen Theorie durch einen endlichen Zustand; sie unterscheiden sich im theoretischen Rahmen und in der Natur dieses Zustands.

Ansatz	Theoretischer Rahmen	Ersatz der Singularität	Quelle
Fuzzball	Stringtheorie	horizontfüllende Mikrozustände	[8]
Planck-Stern	Loop-Quantengravitation	Rückprall bei endlicher Dichte	[9]
Regulärer Kern	begrenzte Krümmung, effektive Metriken	Kern endlicher Krümmung	[17]
Holographie	BH-Thermodynamik, AdS/CFT	Freiheitsgrade auf dem Horizont	[19, 24]
Betragszustand	theorieagnostisch (diese Arbeit)	Abbildung $\mathcal{B} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}_{\text{BH}}$	—

So verschieden Apparat und Details dieser Programme sind, das Motiv ist dasselbe: Wo die klassische Theorie unendliche Krümmung oder Dichte vorhersagt, stellt die fundamentale Theorie einen endlichen, wenn auch extremen Zustand der Quantengeometrie bereit. Das legt eine abstraktere, theorieunabhängige Sprache für dasjenige nahe, was an die Stelle der Singularität tritt (Tabelle 1).

4 Unendlich als Domänenmarker

Unendlichkeiten in der Physik sind fast immer ein Zeichen dafür, dass ein Modell außerhalb seines Anwendungsbereichs verwendet wird. In der Quantenfeldtheorie zeigen Ultraviolett-Divergenzen in Schleifenintegralen¹⁶ an, dass naive Kontinuumsmodelle bei hohen Energien beziehungsweise kurzen Abständen zusammenbrechen und durch effektive Feldtheorien oder renormierte Beschreibungen zu ersetzen sind (vgl. [25]). Entsprechendes gilt in der Gravitation: Die Divergenz von Krümmungsinvarianten signalisiert, dass die klassische Kontinuumsbeschreibung der Raumzeit über den Bereich hinaus extrapoliert wird, in dem sie vertrauenswürdig ist.

Wir schlagen deshalb vor, ∞ nicht als Wert zu behandeln, den physikalische Observablen tatsächlich annehmen könnten, sondern als Domänenmarker. Es sei $Q(x)$ eine klassische Observable, etwa ein Krümmungsskalar oder eine Energiedichte, definiert auf einem Bereich der Raumzeit, der durch einen Parameter x beschrieben wird. Divergiert $Q(x)$ gemäß den klassischen Gleichungen für $x \rightarrow x^*$, so stecken darin zwei getrennte Aussagen:

1. Q ist klassisch nur auf einem Definitionsbereich $D_{\text{klassisch}}$ erklärt, und
2. der Grenzpunkt x^* liegt außerhalb von $D_{\text{klassisch}}$.

¹⁴Planck-Einheiten sind die aus den Naturkonstanten G , c und $\hbar$ gebildeten natürlichen Maßeinheiten; die Planck-Länge beträgt $\ell_P = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 1,6 \times 10^{-35}$ m.

¹⁵Die AdS/CFT-Korrespondenz ist eine vermutete exakte Äquivalenz zwischen einer Gravitationstheorie in einem Anti-de-Sitter-Raum (einer Raumzeit mit konstanter negativer Krümmung) und einer konformen Feldtheorie ohne Gravitation auf dessen Rand.

¹⁶Schleifenintegrale summieren in der störungstheoretischen Quantenfeldtheorie über alle Quantenfluktuationen; Ultraviolett-Divergenzen entstehen, wenn dabei beliebig hohe Impulse beitragen.

Bei x^* ist zu einer anderen Beschreibung überzugehen, mit anderem Zustandsraum und anderen effektiven Variablen. Für die Entstehung Schwarzer Löcher heißt das: Die kollabierende Konfiguration wird auf einen neuen Schwarzen-Loch-Zustand abgebildet, der die Masse-Energie und die weiteren Erhaltungsgrößen trägt. Es liegt daher nahe, eine explizite Abbildung vom klassischen Konfigurationsraum in einen Raum von Schwarzen-Loch-Zuständen einzuführen, die immer dann greift, wenn eine klassische Größe formal divergieren würde. Der folgende Abschnitt konstruiert ein einfaches mathematisches Rahmenwerk, das diesen Übergang explizit macht.

5 Ein einfaches mathematisches Rahmenwerk

Das Rahmenwerk soll nicht die volle Komplexität der Allgemeinen Relativitätstheorie reproduzieren, sondern in einem einfachen Modell erfassen, wie sich die mit dem Gravitationskollaps verbundenen Divergenzen durch eine Abbildung auf endliche Betragzustände ersetzen lassen. Wir beginnen mit einem klassischen Standardmodell für die Dichte eines kollabierenden Objekts, führen dann eine endliche Dichteschranke und eine Übergangsbedingung ein und definieren schließlich einen abstrakten Betragzustands-Operator, der die kollabierte Masse-Energie in einem Schwarzen-Loch-Zustand zusammenfasst.

5.1 Klassische Dichtedivergenz

Betrachtet sei ein sphärisch symmetrisch kollabierender Körper der Gesamtmasse M und des Radius R . In einem groben homogenen Modell, wie es idealisierten Kollapsrechnungen seit Oppenheimer und Snyder [26] zugrunde liegt, beträgt die mittlere Massendichte

$$\rho(R) = \frac{M}{V(R)} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3M}{4\pi R^3}. \quad (3)$$

Mit abnehmendem R wächst $\rho(R)$. Im klassischen Bild hindert nichts R daran, gegen null zu streben, sodass $\rho(R) \rightarrow \infty$ für $R \rightarrow 0$; diese Divergenz wird mit der Bildung einer Singularität im Zentrum des Schwarzen Lochs assoziiert (Abbildung 1).

Bei hinreichend hohen Dichten ist allerdings zu erwarten, dass quantengravitative Effekte wichtig werden und der klassische Ausdruck (3) seine Gültigkeit verliert. Es bezeichne $\rho_{\max}$ eine kritische Dichte, jenseits derer die klassische Kontinuumsnäherung zusammenbricht. Der genaue mikroskopische Ursprung von $\rho_{\max}$ muss dafür nicht bekannt sein; die Größe fungiert als Platzhalter für das Einsetzen neuer Physik. Der Gedanke einer solchen universellen Dichteschranke geht auf Markov zurück [18].

Damit lässt sich ein kritischer Radius R^* definieren, bei dem das homogene Dichtemodell $\rho_{\max}$ erreichen würde:

$$\rho_{\max} = \frac{3M}{4\pi R^{*3}} \quad \implies \quad R^* = \left(\frac{3M}{4\pi \rho_{\max}} \right)^{1/3}. \quad (4)$$

Für $R > R^*$ ist die klassische Beschreibung zumindest qualitativ sinnvoll. Für $R \leq R^*$ versucht das homogene Kontinuumsmodell, ρ über $\rho_{\max}$ hinauszutreiben, und verdient kein Vertrauen mehr.

5.2 Satturierte Observablen und Übergangsbedingung

Um wörtliche Divergenzen zu vermeiden, definieren wir eine effektive, saturierte Dichte

$$\rho_{\text{eff}}(R) = \min(\rho(R), \rho_{\max}). \quad (5)$$

Diese einfache Vorschrift stellt sicher, dass $\rho_{\text{eff}}(R)$ die Schranke $\rho_{\max}$ nie überschreitet, auch wenn der klassische Ausdruck $\rho(R)$ divergieren würde (Abbildung 2). Der Zweck der Konstruktion liegt

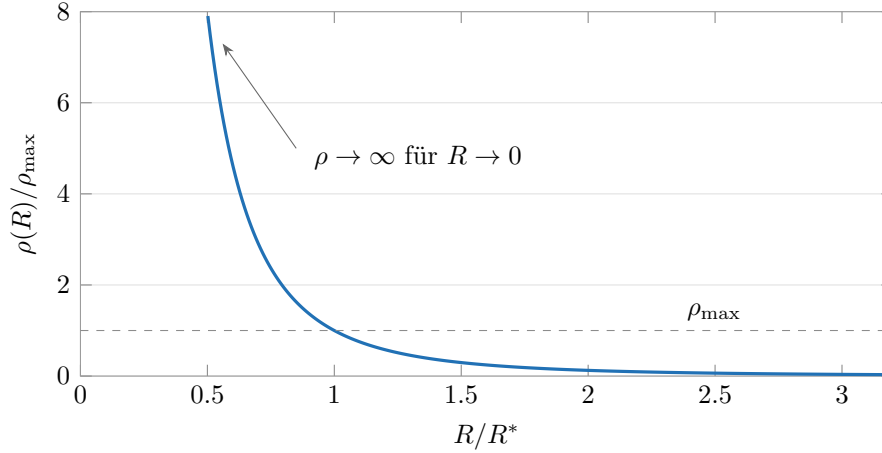


Abbildung 1: Klassische Dichtedivergenz im homogenen Kollapsmodell. Die Funktion $\rho(R) = 3M/(4\pi R^3)$ wächst für $R \rightarrow 0$ über alle Grenzen; die gestrichelte Linie markiert die kritische Dichte $\rho_{\max}$, ab der die Kontinuumsnäherung nicht mehr trägt.

jedoch nicht im bloßen Kappen der Dichte, sondern darin, beim Eintritt in das Sättigungsregime einen Wechsel der zugrunde liegenden Beschreibung anzuzeigen. In Modellen regulärer Schwarzer Löcher übernimmt ein Kern konstanter effektiver Dichte dieselbe Rolle (vgl. [17]).

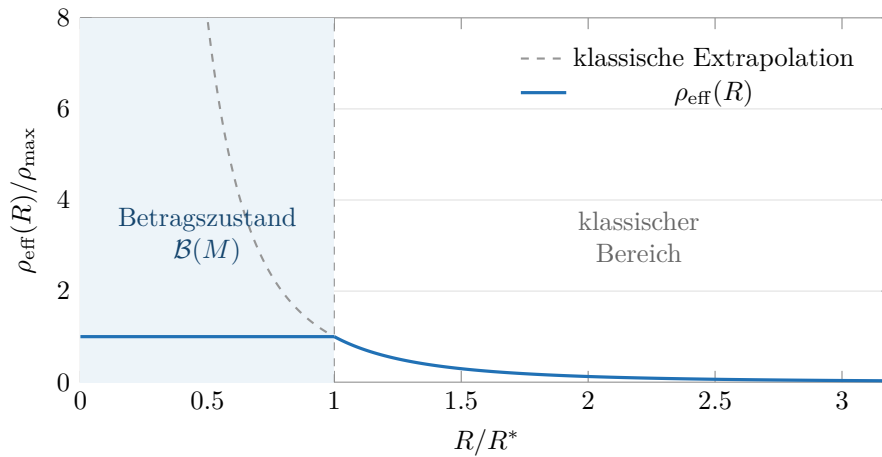


Abbildung 2: Effektive Dichte $\rho_{\text{eff}}(R)$ mit Schranke $\rho_{\max}$. Die klassische Divergenz (grau gestrichelt) wird durch ein Sättigungsplateau ersetzt; der kritische Radius R^* markiert den Übergang in das Regime des Schwarzen-Loch-Zustands (blau hinterlegt).

Der kollabierenden Konfiguration wird daher ein Paar $(R, \text{Zustand})$ zugeordnet, wobei die Zustandskomponente festhält, ob das System noch durch das klassische Kontinuumsmodell beschrieben wird oder bereits in einen Betragszustand übergegangen ist:

$$\text{Zustand}(R) = \begin{cases} \text{KLASSISCH}, & R > R^*, \\ \text{BH-ZUSTAND}, & R \leq R^*. \end{cases} \quad (6)$$

Die Bedingung $\rho(R) \geq \rho_{\max}$, gleichwertig $R \leq R^*$, dient also als Auslöser für den Eintritt in das Schwarze-Loch-Regime. Im Zustand BH-ZUSTAND wird die innere Dynamik nicht mehr durch die homogene Dichte beschrieben; das System ist stattdessen durch makroskopische Parameter charakterisiert, insbesondere seine Gesamtmasse M sowie gegebenenfalls Drehimpuls und Ladung.

Bemerkung 5.1 (Horizontbildung und Übergangsbedingung). Die Bedingung $R \leq R^*$ ist nicht mit der Horizontbildung zu verwechseln. Ein Ereignishorizont entsteht bereits, wenn die Materie ihren Schwarzschild-Radius (1) unterschreitet, was bei großen Massen schon bei geringer mittlerer Dichte geschieht. Liegt $\rho_{\max}$ in der Größenordnung der Planck-Dichte¹⁷, so gilt für astrophysikalische Massen $R^* \ll r_s$; für eine Sonnenmasse etwa $R^* \sim 10^{-22}$ m gegenüber $r_s \approx 3$ km. Der Übergang in den Betragzustand betrifft daher die Fortsetzung des Kollapses tief im Inneren des Horizonts, also genau den Bereich, für den die klassische Theorie die Singularität vorhersagt. Horizont und Außengeometrie bleiben davon unberührt klassisch.

5.3 Betragzustands-Operator und das Analogon zur Division durch null

Die Vorstellung, dass das Schwarze Loch ein Betragzustand der kollabierten Masse-Energie ist, lässt sich nun formalisieren.

Definition 5.2 (Betragszustands-Operator). Es sei $\mathcal{C}$ der Raum der klassischen Konfigurationen kollabierender Materie (etwa Funktionen, die Dichteprofile und Geschwindigkeitsfelder festlegen) und $\mathcal{S}_{\text{BH}}$ der Raum der Schwarzen-Loch-Zustände, charakterisiert mindestens durch einen Massenparameter M und gegebenenfalls durch weitere Ladungen. Der *Betragszustands-Operator* ist die Abbildung

$$\mathcal{B} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}_{\text{BH}}, \quad (7)$$

die eine klassische Konfiguration $c \in \mathcal{C}$ auf einen Schwarzen-Loch-Zustand $\mathcal{B}(c)$ abbildet, sobald die kritische Bedingung $\rho \geq \rho_{\max}$ an mindestens einer Stelle der Konfiguration erfüllt ist.

Im homogenen Modell lässt sich $\mathcal{B}$ als Funktion der Masse allein schreiben: $\mathcal{B}(M) \in \mathcal{S}_{\text{BH}}$. Anschaulich steht $\mathcal{B}(M)$ für „das aus der kollabierenden Masse M entstandene Schwarze Loch“. Die innere Struktur von $\mathcal{B}(M)$ bleibt offen; sie kann etwa eine große Zahl von Mikrozuständen einer fundamentalen Quantentheorie kodieren. Abbildung 3 zeigt die Struktur der Abbildung.

Bemerkung 5.3 (Zum Begriff des Betragzustands). Der Begriff „Betrag“ ist metaphorisch gemeint. Es geht nicht um $|M|$ als Zahl, sondern um die Vorstellung, dass die Gesamtheit der eingefallenen Materie und Energie nicht verschwindet, sondern in eine andere, endliche Zustandsform überführt wird, die nach außen nur durch wenige makroskopische Parameter sichtbar ist.

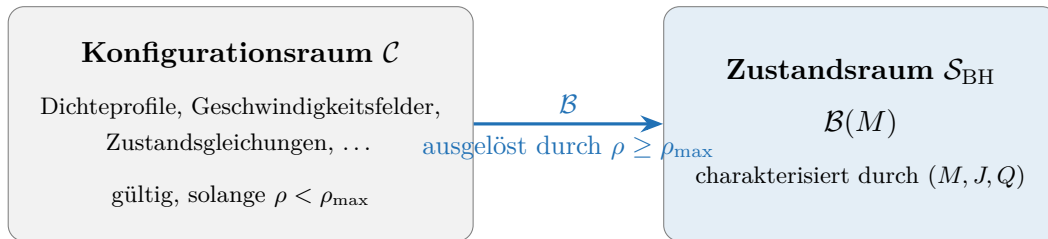


Abbildung 3: Konzeptionelle Abbildung vom klassischen Konfigurationsraum $\mathcal{C}$ in den Zustandsraum $\mathcal{S}_{\text{BH}}$. Die Divergenz klassischer Observablen löst den Übergang $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}_{\text{BH}}$ aus; der Betragzustand $\mathcal{B}(M)$ ersetzt die Singularität.

Die Konstruktion lässt sich mit der Intuition der „Division durch null“ verbinden. Die homogene Dichte (3) hat die Form N/V mit einem Nenner V , der im Kollaps gegen null strebt. In naiver Algebra läge nahe, diesen Grenzwert als eine Art Division durch null zu behandeln. Statt ∞ als numerischen Wert einzuführen, verstehen wir den Grenzübergang

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{3M}{4\pi R^3} \rightsquigarrow \mathcal{B}(M) \quad (8)$$

¹⁷Die Planck-Dichte $\rho_P = c^5/(\hbar G^2) \approx 5 \times 10^{96}$ kg/m³ markiert die Skala, ab der Quanteneffekte der Gravitation die Geometrie dominieren dürften.

als Signal, dass die klassische Observable ρ ihren Definitionsbereich verlässt und die korrekte Beschreibung durch den Betrazzustand $\mathcal{B}(M)$ gegeben ist.

Wer den Anschluss an die Division-durch-null-Intuition explizit machen will, kann eine symbolische Operation $\oslash$ auf den positiven reellen Zahlen einführen:

$$M \oslash 0 := \mathcal{B}(M), \quad M > 0. \quad (9)$$

Bemerkung 5.4 (Kein Bruch mit der reellen Arithmetik). Die Operation $\odot$ in (9) ist keine gewöhnliche Division, sondern eine Kurzschreibweise für „Kollaps in einen Schwarzen-Loch-Zustand“. Entscheidend ist, dass sie ein Element von $\mathcal{S}_{\text{BH}}$ zurückgibt und keine reelle Zahl. Sie unterliegt damit nicht den algebraischen Regeln der reellen Arithmetik und vermeidet die Widersprüche, die entstehen, wenn man $1/0$ als reelle Zahl zu definieren versucht. Das „mathematische“ Analogon der Division durch null wird so durch einen geregelten Übergang vom Konfigurationsraum $\mathcal{C}$ in den Zustandsraum $\mathcal{S}_{\text{BH}}$ ersetzt.

6 Anwendung auf den Gravitationskollaps

Wie sich das Rahmenwerk auf den Gravitationskollaps anwenden lässt, zeigt ein vereinfachtes Szenario. Das Modell bleibt grob, aber seine Struktur spiegelt die qualitativen Erwartungen aufwendigerer Behandlungen wider. Abbildung 4 zeigt das resultierende Raumzeitbild in Form eines vereinfachten Penrose-Diagramms¹⁸.

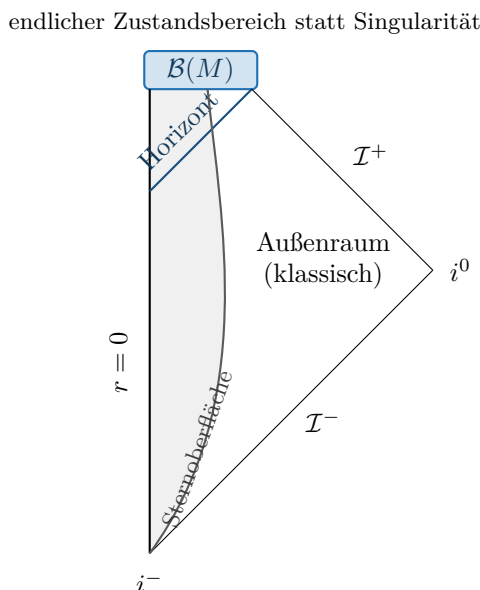


Abbildung 4: Vereinfachtes, Penrose-artiges Schema des Gravitationskollapses. Außenraum und Horizontstruktur bleiben klassisch beschrieben; an die Stelle der klassischen Singularität am oberen Rand tritt der endliche Zustandsbereich $\mathcal{B}(M)$, in den die kollabierte Materie abgebildet wird. $\mathcal{I}^+$ und $\mathcal{I}^-$ bezeichnen die zukünftige und vergangene Null-Unendlichkeit (Ziel bzw. Ursprung von Lichtstrahlen), i^0 die räumliche und i^- die vergangene zeitartige Unendlichkeit.

6.1 Kollapsszenario im Modell

1. Ausgangspunkt ist eine ausgedehnte klassische Konfiguration $c_0 \in \mathcal{C}$, die einen Stern der Masse M mit Radius $R_0 \gg R^*$ repräsentiert.

¹⁸Ein Penrose-Diagramm staucht die gesamte Raumzeit durch eine konforme Transformation auf ein endliches Diagramm; Lichtstrahlen verlaufen darin unter 45° , und die Ränder repräsentieren die verschiedenen Unendlichkeiten [5].

2. Während der Stern unter seiner eigenen Gravitation kollabiert, nimmt sein Radius $R(t)$ ab und die mittlere Dichte $\rho(R(t))$ zu.
3. Solange $\rho(R(t)) < \rho_{\max}$ gilt, befindet sich das System im Zustand KLASSISCH. Seine Dynamik wird, zumindest qualitativ, durch die Allgemeine Relativitätstheorie mit geeigneten Materiemodellen beschrieben.
4. Erreicht $R(t)$ den Wert R^* , sagt das homogene Dichtemodell $\rho(R^*) = \rho_{\max}$ voraus. Für kleinere Radien versucht der klassische Ausdruck, ρ über $\rho_{\max}$ hinauszutreiben. Statt $\rho \rightarrow \infty$ zu akzeptieren, interpretieren wir dies als den Punkt, an dem die Abbildung

$$c(t) \mapsto \mathcal{B}(M) \quad (10)$$

zur maßgeblichen Beschreibung wird. Das System geht in den Schwarzen-Loch-Zustand $\mathcal{B}(M)$ über; die inneren klassischen Freiheitsgrade werden nicht mehr explizit verfolgt.

5. Für alle späteren Zeiten wird die äußere Geometrie durch eine geeignete Schwarze-Loch-Raumzeit beschrieben, etwa ein Mitglied der Kerr–Newman-Familie¹⁹, während das Innere abstrakt durch $\mathcal{B}(M)$ repräsentiert ist. Mikroskopische Modelle wie Fuzzballs oder Planck-Sterne liefern Kandidaten für die Realisierung von $\mathcal{B}(M)$ in konkreten Quantengravitationsrahmen.

In diesem Ablauf gibt es keinen Zeitpunkt, zu dem eine physikalische Größe buchstäblich unendlich wird. Der Versuch des klassischen Modells, ρ über $\rho_{\max}$ hinauszutreiben, wird als Extrapolation über den Gültigkeitsbereich hinaus erkannt, und die Beschreibung wechselt zu einem endlichen Betragszustand.

7 Diskussion: Information, Entropie und Beobachter

Die Betragszustands-Interpretation hat Konsequenzen dafür, wie über Information, Entropie und Beobachter in Schwarzen-Loch-Raumzeiten zu sprechen ist.

Aus der Perspektive eines äußeren Beobachters ist ein Schwarzes Loch durch wenige makroskopische Parameter charakterisiert; nach den Eindeutigkeitsätzen²⁰ sind das im stationären Fall gerade Masse, Drehimpuls und Ladung. Der Betragszustand $\mathcal{B}(M)$ kodiert abstrakt die große Zahl mikroskopischer Konfigurationen, die mit diesen Parametern verträglich sind. Die Entropie Schwarzer Löcher lässt sich dann als Maß für den Logarithmus der Zahl solcher Mikrozustände auffassen, im Einklang mit der Bekenstein–Hawking-Entropie

$$S_{\text{BH}} = \frac{k_B c^3 A}{4G\hbar}, \quad (11)$$

die mit der Horizontfläche A statt mit dem eingeschlossenen Volumen skaliert [19, 20].

In diesem Bild wird an keiner Stelle fundamentale Information vernichtet, denn es gibt keine Singularität, die als Endpunkt von Informationsflüssen dienen könnte. Die Information liegt in $\mathcal{B}(M)$ und möglicherweise auf oder nahe dem Horizont vor, im Einklang mit holographischen Ideen (vgl. [21, 22]). Das Informationsparadoxon [29] löst der Rahmen nicht, aber er formuliert es um: Zu fragen ist nicht mehr, ob Information an einem unendlich dichten Punkt verloren geht, sondern wie die in $\mathcal{B}(M)$ kodierte Information während der Verdampfung des Schwarzen Lochs²¹

¹⁹Die Kerr–Newman-Familie umfasst die allgemeinsten stationären Schwarzen-Loch-Lösungen der Einstein–Maxwell-Theorie; sie ist durch Masse, Drehimpuls und Ladung vollständig festgelegt [5].

²⁰Die Eindeutigkeitsätze sind auch als „Keine-Haare-Theoreme“ bekannt: Stationäre Schwarze Löcher tragen außer Masse, Drehimpuls und Ladung keine weiteren unabhängigen Merkmale [27, 28].

²¹Schwarze Löcher strahlen nach Hawking thermisch mit der Temperatur $T_H = \hbar c^3 / (8\pi G M k_B)$ und verlieren dadurch langsam Masse; dieser Prozess wird als Verdampfung bezeichnet [20].

freigesetzt oder transformiert wird. Analysen des Informationsflusses in der Hawking-Strahlung [30] setzen genau an dieser Frage an. Neuere holographische Rechnungen reproduzieren die von Page vorhergesagte Entropiekurve der Strahlung und stützen die Erwartung, dass die Verdampfung die Information erhält [31].

Auch die Beobachterabhängigkeit wird klarer fassbar. Ein einfallender Beobachter, der den Horizont überquert, kann den Übergang zu $\mathcal{B}(M)$ ganz anders erfahren als ein entfernter Beobachter. Der vorliegende Rahmen beschränkt sich auf die Beschreibungsebene asymptotischer Beobachter; die detaillierte Innenperspektive bleibt einer vollständigeren mikroskopischen Theorie überlassen.

Schließlich vermeidet die Lesart von ∞ als Domänenmarker, der Natur unphysikalische Eigenschaften zuzuschreiben. Die Singularitätssätze geben dann an, wann solche Domängengrenzen innerhalb der klassischen Allgemeinen Relativitätstheorie unvermeidlich werden; sie behaupten nicht, dass das Universum tatsächliche Unendlichkeiten enthält.

8 Grenzen des Ansatzes

Fünf Einschränkungen sind festzuhalten:

1. **Kein mikrophysikalisches Modell:** Die innere Struktur von $\mathcal{B}(M)$ bleibt unspezifiziert. Der Rahmen benennt die Rolle dieses Zustands, liefert aber keine Theorie seiner Freiheitsgrade.
2. **Keine quantitativen Vorhersagen:** Entropiewerte, Hawking-Spektren oder Verdampfungszeiten werden nicht berechnet; Gleichung (11) wird übernommen, nicht hergeleitet.
3. **Homogenes Modell:** Der Dichteansatz (3) ist homogen und sphärisch symmetrisch. Inhomogener Kollaps, Drehimpuls, Ladung und dynamische Horizonte sind nicht modelliert.
4. **Übergangsdynamik offen:** Die kritische Dichte $\rho_{\max}$ ist ein Platzhalter für das Einsetzen neuer Physik; die Dynamik des Übergangs bei R^* wird nicht beschrieben, sondern nur markiert.
5. **Außenperspektive:** Der Rahmen beschreibt die Ebene asymptotischer Beobachter. Über die Erfahrung einfallender Beobachter und die Innenraumstruktur trifft er keine Aussagen.

9 Schlussfolgerung und Ausblick

Diese Arbeit hat eine konzeptionelle Neuinterpretation Schwarzer Löcher vorgeschlagen, die darauf verzichtet, Singularitäten als physikalische Objekte mit unendlicher Dichte oder Krümmung zu behandeln. Schwarze Löcher werden stattdessen als Betragszustände $\mathcal{B}(M)$ der kollabierten Masse-Energie aufgefasst. Klassische Divergenzen, etwa das Anwachsen der homogenen Dichte für $R \rightarrow 0$, zeigen an, dass die Grenze des Gültigkeitsbereichs der klassischen Beschreibung erreicht ist; an diesem Punkt wird die Konfiguration auf einen endlichen Schwarzen-Loch-Zustand abgebildet.

Zur Konkretisierung diene ein einfaches Rahmenwerk, in dem eine kritische Dichte $\rho_{\max}$ einen Übergangsradius R^* definiert. Für $R > R^*$ gilt ein klassisches Kontinuumsmodell; für $R \leq R^*$ wird das System durch den Betragszustand $\mathcal{B}(M)$ beschrieben. Die drohende Divergenz von Größen wie $3M/(4\pi R^3)$ erzeugt keine wörtlichen Unendlichkeiten, sondern löst die Abbildung in den Zustandsraum $\mathcal{S}_{\text{BH}}$ aus; die Operation $M \oslash 0 := \mathcal{B}(M)$ fasst diesen Schritt symbolisch als geregeltes Analogon der Division durch null.

Mehrere Erweiterungen bieten sich an. Das Modell ließe sich auf inhomogenen Kollaps, Drehimpuls, Ladung und dynamische Horizonte verfeinern. Die Betragszustands-Idee könnte

in konkrete Quantengravitationsansätze eingebettet werden, indem $\mathcal{B}(M)$ mit spezifischen Objekten wie Fuzzballs, Planck-Sternen oder holographischen Randzuständen identifiziert wird. Offen ist auch, ob analoge Betragzustands-Übergänge den Status kosmologischer Singularitäten wie des Urknalls klären können.

Die Arbeit versteht sich damit als Bindeglied zwischen den rigorosen Singularitätssätzen und den quantengravitativ motivierten Szenarien der Singularitätsauflösung: Sie gibt einen expliziten, mathematisch geregelten Weg an, ∞ durch einen endlichen, informationstragenden Zustand zu ersetzen.

Literatur

- [1] R. Penrose, „Gravitational collapse and space-time singularities“, *Physical Review Letters*, Bd. 14, Nr. 3, S. 57–59, 1965, doi: 10.1103/PhysRevLett.14.57.
- [2] S. W. Hawking und R. Penrose, „The singularities of gravitational collapse and cosmology“, *Proceedings of the Royal Society of London A*, Bd. 314, S. 529–548, 1970, doi: 10.1098/rspa.1970.0021.
- [3] S. W. Hawking und G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge: Cambridge University Press, 1973.
- [4] R. Geroch, „What is a singularity in general relativity?“, *Annals of Physics*, Bd. 48, Nr. 3, S. 526–540, 1968, doi: 10.1016/0003-4916(68)90144-9.
- [5] R. M. Wald, *General Relativity*. Chicago: University of Chicago Press, 1984.
- [6] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration und Virgo Collaboration), „Observation of gravitational waves from a binary black hole merger“, *Physical Review Letters*, Bd. 116, Nr. 6, 061102, 2016, doi: 10.1103/PhysRevLett.116.061102.
- [7] Event Horizon Telescope Collaboration, „First M87 Event Horizon Telescope results. I. The shadow of the supermassive black hole“, *The Astrophysical Journal Letters*, Bd. 875, Nr. 1, L1, 2019, doi: 10.3847/2041-8213/ab0ec7.
- [8] S. D. Mathur, „The fuzzball proposal for black holes: An elementary review“, *Fortschritte der Physik*, Bd. 53, Nr. 7–8, S. 793–827, 2005, doi: 10.1002/prop.200410203, arXiv: hep-th/0502050.
- [9] C. Rovelli und F. Vidotto, „Planck stars“, *International Journal of Modern Physics D*, Bd. 23, Nr. 12, 1442026, 2014, doi: 10.1142/S0218271814420267, arXiv: 1401.6562.
- [10] R. Carballo-Rubio et al., „Towards a non-singular paradigm of black hole physics“, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, Bd. 2025, Nr. 5, 003, 2025, doi: 10.1088/1475-7516/2025/05/003, arXiv: 2501.05505.
- [11] K. Schwarzschild, „Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie“, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, S. 189–196, 1916.
- [12] E. Curiel, „The many definitions of a black hole“, *Nature Astronomy*, Bd. 3, S. 27–34, 2019, doi: 10.1038/s41550-018-0602-1, arXiv: 1808.01507.
- [13] R. P. Kerr, „Do black holes have singularities?“, Preprint, 2023, arXiv: 2312.00841.

- [14] A. Ashtekar und M. Bojowald, „Quantum geometry and the Schwarzschild singularity“, *Classical and Quantum Gravity*, Bd. 23, Nr. 2, S. 391–411, 2006, doi: 10.1088/0264-9381/23/2/008, arXiv: gr-qc/0509075.
- [15] A. Ashtekar, J. Olmedo und P. Singh, „Quantum transfiguration of Kruskal black holes“, *Physical Review Letters*, Bd. 121, Nr. 24, 241301, 2018, doi: 10.1103/PhysRevLett.121.241301, arXiv: 1806.00648.
- [16] E. Bianchi, M. Christodoulou, F. D’Ambrosio, H. M. Haggard und C. Rovelli, „White holes as remnants: A surprising scenario for the end of a black hole“, *Classical and Quantum Gravity*, Bd. 35, Nr. 22, 225003, 2018, doi: 10.1088/1361-6382/aae550, arXiv: 1802.04264.
- [17] S. A. Hayward, „Formation and evaporation of nonsingular black holes“, *Physical Review Letters*, Bd. 96, Nr. 3, 031103, 2006, doi: 10.1103/PhysRevLett.96.031103, arXiv: gr-qc/0506126.
- [18] M. A. Markov, „Limiting density of matter as a universal law of nature“, *JETP Letters*, Bd. 36, Nr. 6, S. 265–267, 1982.
- [19] J. D. Bekenstein, „Black holes and entropy“, *Physical Review D*, Bd. 7, Nr. 8, S. 2333–2346, 1973, doi: 10.1103/PhysRevD.7.2333.
- [20] S. W. Hawking, „Particle creation by black holes“, *Communications in Mathematical Physics*, Bd. 43, Nr. 3, S. 199–220, 1975, doi: 10.1007/BF02345020.
- [21] G. ’t Hooft, „Dimensional reduction in quantum gravity“, in *Salamfestschrift*, Singapur: World Scientific, 1993, arXiv: gr-qc/9310026.
- [22] L. Susskind, „The world as a hologram“, *Journal of Mathematical Physics*, Bd. 36, Nr. 11, S. 6377–6396, 1995, doi: 10.1063/1.531249, arXiv: hep-th/9409089.
- [23] R. Bousso, „The holographic principle“, *Reviews of Modern Physics*, Bd. 74, Nr. 3, S. 825–874, 2002, doi: 10.1103/RevModPhys.74.825, arXiv: hep-th/0203101.
- [24] J. Maldacena, „The large N limit of superconformal field theories and supergravity“, *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, Bd. 2, Nr. 2, S. 231–252, 1998, doi: 10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a1.
- [25] S. Weinberg, „Phenomenological Lagrangians“, *Physica A*, Bd. 96, Nr. 1–2, S. 327–340, 1979, doi: 10.1016/0378-4371(79)90223-1.
- [26] J. R. Oppenheimer und H. Snyder, „On continued gravitational contraction“, *Physical Review*, Bd. 56, Nr. 5, S. 455–459, 1939, doi: 10.1103/PhysRev.56.455.
- [27] W. Israel, „Event horizons in static vacuum space-times“, *Physical Review*, Bd. 164, Nr. 5, S. 1776–1779, 1967, doi: 10.1103/PhysRev.164.1776.
- [28] B. Carter, „Axisymmetric black hole has only two degrees of freedom“, *Physical Review Letters*, Bd. 26, Nr. 6, S. 331–333, 1971, doi: 10.1103/PhysRevLett.26.331.
- [29] S. W. Hawking, „Breakdown of predictability in gravitational collapse“, *Physical Review D*, Bd. 14, Nr. 10, S. 2460–2473, 1976, doi: 10.1103/PhysRevD.14.2460.
- [30] D. N. Page, „Information in black hole radiation“, *Physical Review Letters*, Bd. 71, Nr. 23, S. 3743–3746, 1993, doi: 10.1103/PhysRevLett.71.3743.
- [31] A. Almheiri, T. Hartman, J. Maldacena, E. Shaghoulian und A. Tajdini, „The entropy of Hawking radiation“, *Reviews of Modern Physics*, Bd. 93, Nr. 3, 035002, 2021, doi: 10.1103/RevModPhys.93.035002, arXiv: 2006.06872.